

Jean-Marc Ginoux

Mathématiques pour le BUT

Cours avec plus de 160 exercices corrigés



Chapitre 1

Fonctions d'une variable réelle

1.1 Définitions

1.1.1 Introduction

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction de A vers B si tout nombre réel x de A a pour image par f au plus un (i.e. un ou zéro) nombre réel de B . f ainsi définie est une fonction de la variable réelle x .

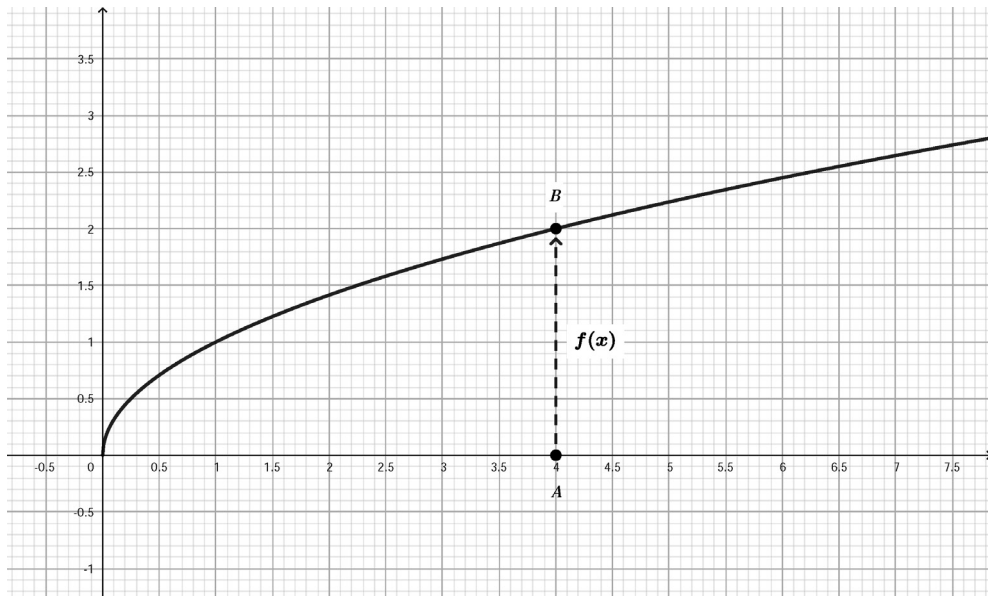


FIGURE 1.1 – Exemple de fonction $y = f(x) = \sqrt{x}$.

On observe sur la Fig. 1.1 que le point A d'abscisse $x = 4$ a pour unique image par f un unique point B d'ordonnée $y = 2$. En revanche, on remarque sur la Fig. 1.2 que le point O d'abscisse $x = 0$ possède deux images, i.e., les deux points A et B d'abscisse $y = \pm 1$. Dans ce cas, on dit que la fonction est bi-valuée. En effet, la fonction mathématique qui définit le cercle n'est pas une fonction d'une seule variable mais de deux variables : $x^2 + y^2 = 1$.

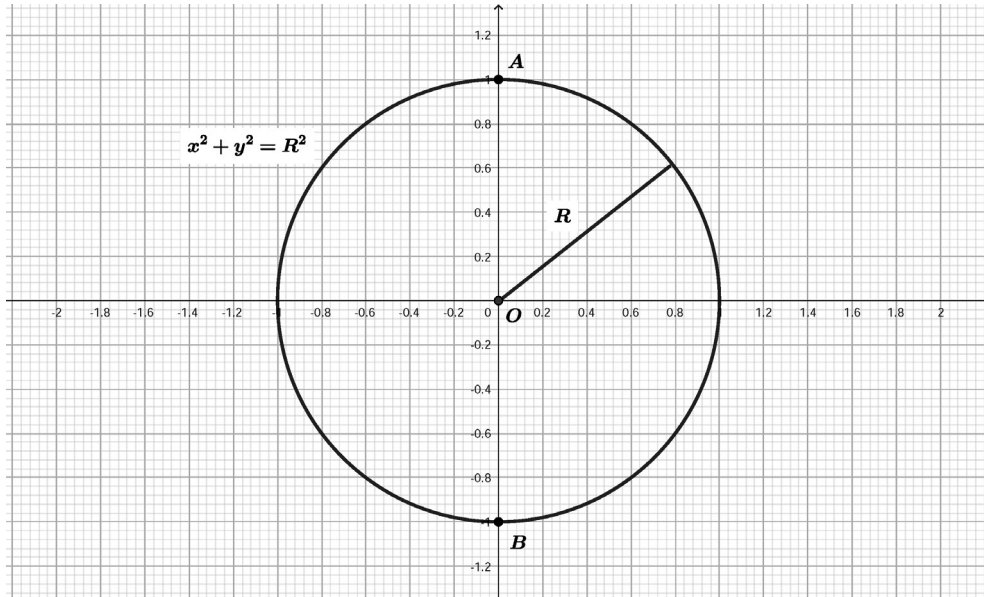


FIGURE 1.2 – Contre-exemple de fonction bi-valuée.

1.1.2 Ensemble de définition

L'ensemble de définition D_f de f , est la partie de A dont les éléments ont une image dans B .

Le mot *défini* signifie *déterminé*. Le mot *indéfini* signifie *infini*.

Rechercher l'ensemble de définition d'une fonction c'est déterminer le domaine (resp. l'intervalle) à l'intérieur duquel cette fonction n'admet que des valeurs finies.

1.1.3 Notation et représentation graphique

La fonction f de A vers B est une application de A dans B qui à x fait correspondre y tel que :

$$f : A \rightarrow B,$$

$$x \mapsto y = f(x).$$

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un R.O.N.D. (i.e. un repère orthonormé direct) du plan P . La représentation graphique de f consiste en l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$. Le point M décrit la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f lorsque x décrit D_f .

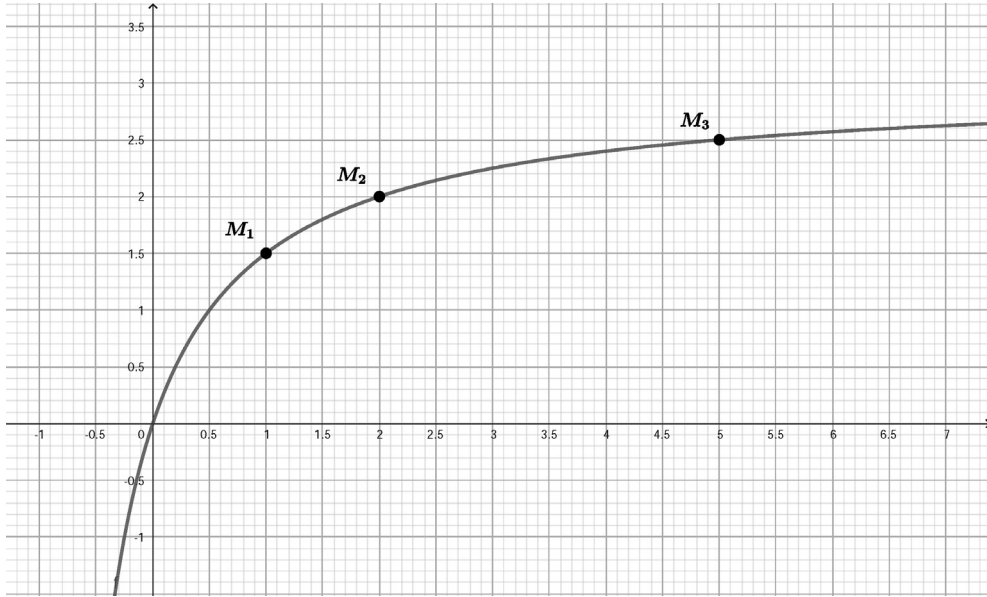


FIGURE 1.3 – Courbe représentative $\mathcal{C}$ de f lorsque x décrit D_f .

Sur la Fig. 1.3, on a placé trois valeurs du point M en $M_1(1, 1.5)$, $M_2(2, 2)$ et $M_3(5, 2.5)$ qui décrivent la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en une sorte de trajectoire d'un point mobile se déplaçant dans le plan.

1.1.4 Détermination pratique de l'ensemble de définition

On considère les trois cas génériques suivants. Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions :

1^{er} cas : fonction du type $f(x) = \frac{A}{B} \Rightarrow f$ est définie pour tout $B \neq 0$

2^e cas : fonction du type $f(x) = \sqrt{B} \Rightarrow f$ est définie pour tout $B \geq 0$

3^e cas : fonction du type $f(x) = \frac{A}{\sqrt{B}} \Rightarrow f$ est définie pour tout $B > 0$.

Remarque : Ensemble et intervalle de définition

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}^*$.
Elle admet pour intervalle de définition l'intervalle : $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$.

1.1.5 Continuité

Une fonction f est continue en un point x_0 où elle est définie si et seulement si (ssi) elle admet en ce point une limite l finie.

On dit que f est continue en x_0 ssi $\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0$ tels que $\forall x \in I$,

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

On peut illustrer cette définition par l'exemple présenté dans la Fig. 1.4. On remarque dans le premier cas (entre A et B) qu'une petite différence entre x et x_0 (ici $\eta = 1\text{cm}$) n'implique pas une grande différence entre y et y_0 ($\varepsilon = 0.2\text{cm}$), i.e., entre $f(x)$ et $f(x_0)$. Alors que dans le second cas (entre C et D) une petite différence entre x et x_0 (η toujours égal à 1cm) implique une différence de plus en plus importante voire infinie entre y et y_0 , i.e., entre $f(x)$ et $f(x_0)$.

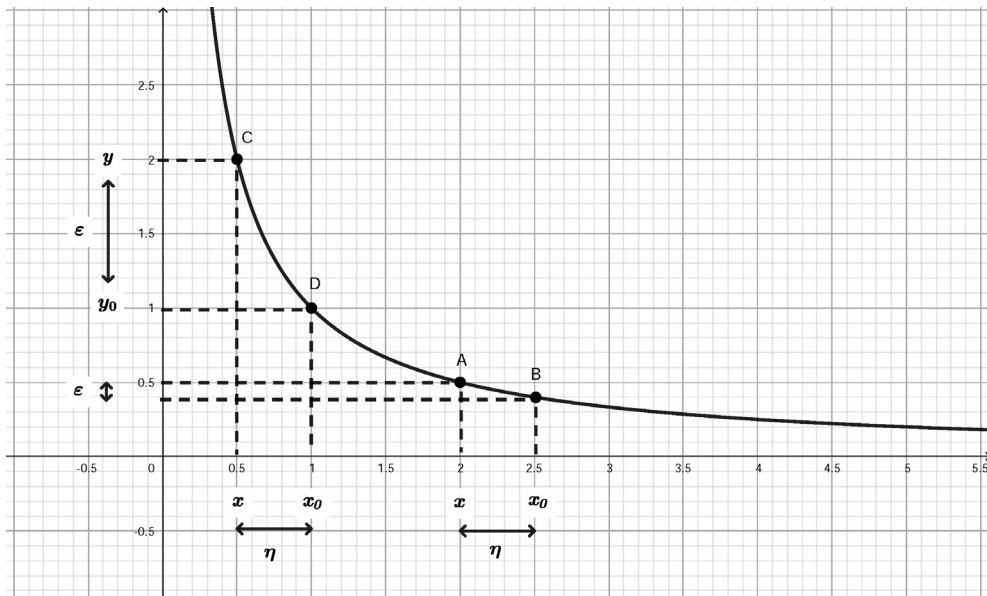


FIGURE 1.4 – Continuité de $f(x)$ en un point x_0 .

1.1.6 Limites

Définition – Notation

Soit f une fonction $y = f(x)$ définie sur un intervalle I contenant le point x_0 . On dit que f admet pour limite en ce point x_0 le nombre réel L ssi : $\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0$ tels que $\forall x \in I$,

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Théorèmes

Théorème 1.1. En $\pm\infty$, la limite d'une fraction rationnelle est égale au quotient de ses termes de plus haut degré.

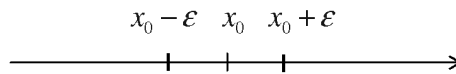
Démonstration. Soit la fonction $y = f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. Cherchons sa limite en $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x}\right) \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

puisque en $\pm\infty$, les termes $2/x$ et $1/x$ tendent vers 0.

□

Théorème 1.2. Limite à gauche et à droite de x_0 .



- Limite à gauche :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x_0 - \varepsilon)$$

- Limite à droite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x_0 + \varepsilon)$$

Formes indéterminées

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \infty - \infty}$$

Remarque :

Les trois premières sont identiques car $\frac{1}{0} = \infty$, d'où $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0} = 0 \times \infty$.

Théorème 1.3. Règle de L'Hospital :

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables respectivement sur un intervalle $[a, b]$ et $]a, b[$. Si pour tout $x_0 \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$ et si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{\infty}{\infty} \\ 0 \\ \frac{0}{0} \\ 0 \times \infty \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si cette limite tend de nouveau vers $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ ou $0 \times \infty$, on réitère la règle.

1.2 Parité – Périodicité

- Si $f(-x) = f(x)$ alors la fonction f est paire et sa représentation graphique admet l'axe ($y'y$) comme axe de symétrie.
- Si $f(-x) = -f(x)$ alors la fonction f est impaire et sa représentation graphique admet le point $O(0,0)$ comme centre de symétrie.
- Si $f(x+T) = f(x)$ alors la fonction f est périodique de période T et sa représentation graphique se déduit par translation de vecteur $T\vec{i}$.

1.3 Dérivées

1.3.1 Taux de variations

Le taux de variation d'une fonction f continue définie sur un intervalle $[a, b]$ est égale à :

$$T = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

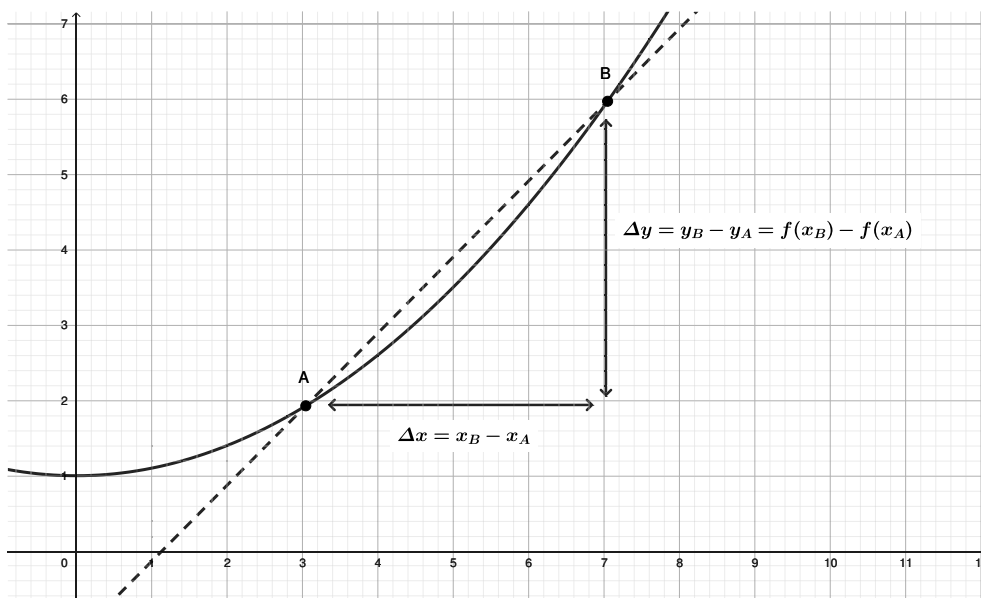


FIGURE 1.5 – Taux de variations d'une fonction.

T représente le coefficient directeur (la pente) de la droite (AB) (voir Fig. 1.5).

Si $T > 0$, f est croissante,

Si $T < 0$, f est décroissante.

1.3.2 Dérivabilité en un point x_0

Soient f une fonction continue et définie sur D_f et $x_0 \in D_f$. On dit que f est dérivable en x_0 ssi :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \quad \text{avec } L \text{ finie.}$$

Notation :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Théorème 1.4. *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*
 (ATTENTION : la réciproque est FAUSSE!)

Contre-exemple :

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue et définie en 0 mais n'y est pas dérivable car $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(x)$ n'est pas définie en 0.

1.3.3 Interprétation géométrique

Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans un R.O.N.D. $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si f est dérivable en x_0 , $(\mathcal{C})$ admet une tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$, de coefficient directeur $f'(x_0)$. L'équation de cette tangente s'écrit :

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Remarque :

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = 0$, $(\mathcal{C})$ admet en x_0 une tangente *horizontale*,
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = k$, $(\mathcal{C})$ admet en x_0 une tangente *oblique*,
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \pm\infty$, $(\mathcal{C})$ admet en x_0 une tangente *verticale*.

1.3.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Les dérivées de fonctions simples sont résumées dans le tableau 1 ci-dessous.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^2	$2x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

TABLE 1.1 – Tableau de dérivées de fonctions simples.

Formule fondamentale du Tab. 1

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Les dérivées de fonctions trigonométriques se déduisent de la Fig. 1.6 ci-dessous.

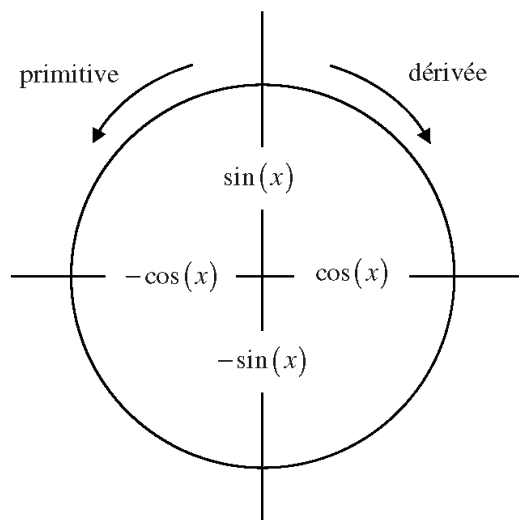


FIGURE 1.6 – Dérivées de fonctions trigonométriques.

Les dérivées de fonctions de fonctions sont résumées dans le tableau 2 ci-dessous. Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Formule fondamentale du Tab. 2

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$(u + v)'$	$u' + v'$
$(ku)'$	ku'
$(uv)'$	$u'v + v'u$
$\left(\frac{1}{v}\right)'$	$-\frac{v'}{v^2}$
$(\sqrt{u})'$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u^n)'$	$nu^{n-1}u'$
$(e^u)'$	$u'e^u$
$(\ln(u))'$	$\frac{u'}{u}$

TABLE 1.2 – Tableau de dérivées de fonctions de fonctions.

Dérivée d'une fonction de fonction

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , la fonction composée $f \circ g$, notée également $f[g(x)]$ est aussi dérivable sur I .

$$(f[g(x)])' = g'(x)f'[g(x)]$$

Exemple :

$$\begin{aligned} (\cos(ax+b))' &= -a \sin(ax+b) \\ (\sin(ax+b))' &= a \cos(ax+b) \end{aligned}$$

1.3.5 Extremum – Extrema

Un *extremum* est une valeur extrême que peut prendre une fonction $f(x)$, i.e. un *maximum* ou un *minimum*. Le pluriel d'*extremum* est, non pas *extremums*, mais *extrema*. Un *extremum*, des *extrema*, un *minimum des minima* . . .

Le lieu des points où la dérivée $f'(x)$ de la fonction f s'annule correspond au lieu des points où la fonction $f(x)$ présente des *extrema*, i.e., des points où la fonction passe par un *maximum* (respectivement un *minimum*). D'après la remarque du §3.3., en un *maximum* (respectivement un *minimum*), la fonction possède une tangente horizontale.

Le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ de la fonction $f(x)$ évaluée en un extremum local permet de statuer sur la concavité ou la convexité de la courbe.

- Si la fonction f admet en x_0 un extremum local, i.e., si $f'(x_0) = 0$ et,
 - si $f''(x_0) > 0$ alors la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f admet en x_0 un minimum local, i.e., elle est concave.
 - si, au contraire $f''(x_0) < 0$, la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f admet en x_0 un maximum local, i.e., elle est convexe.
 - si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) = 0$, la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f admet en x_0 un point d'inflexion horizontale.

1.4 Fonction réciproque (inverse) – Bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur un intervalle $[a, b]$ alors la fonction réciproque (inverse) de f notée f^{-1} appelée également bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$ a les propriétés suivantes :

- Elle est strictement monotone sur $[f(a), f(b)]$ et varie dans le même sens que f ,
- Elle est continue sur $[f(a), f(b)]$.

Les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, i.e., la droite d'équation $y = x$ (voir la Fig. 1.7).

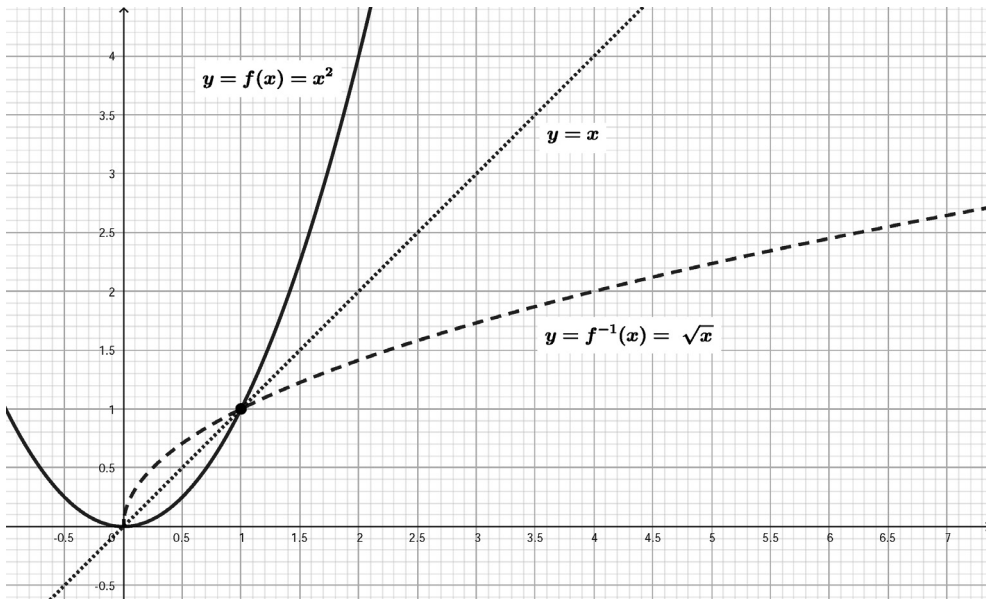


FIGURE 1.7 – Fonction et fonction inverse symétriques.

Exemple :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto y = f(x) = x^2. \end{aligned}$$

Il est aisé de démontrer que cette fonction est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, i.e., sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, on peut définir la fonction réciproque de f ainsi :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Application à la détermination des racines d'une équation

Peut-on résoudre par la méthode des radicaux (discriminant pour une équation du second degré) n'importe quelle équation algébrique polynomiale de degré n ?

La réponse à cette question fut donnée par le mathématicien français Évariste Galois mort tragiquement en duel à l'âge de 20 ans !

Évariste Galois démontra qu'il est impossible de résoudre une équation algébrique polynômiale de degré supérieur ou égal à 5 par la méthode des radicaux, i.e., qu'il est impossible de déterminer analytiquement les solutions d'une telle équation. On peut cependant les approcher grâce au théorème suivant :

Théorème 1.5 (Théorème de la dichotomie). *Soit f continue sur l'intervalle $[a, b]$ si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins une valeur $x_0 \in]a, b[$ telle que $f(x_0) = 0$.*

Ce théorème qui définit l'existence d'une application réciproque (bijection) permet de déterminer les valeurs des racines de n'importe quelle équation (en particulier les équations de degré supérieur ou égal à 5).

Exemple :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto y = f(x) = x^2 - 6x + 8. \end{aligned}$$

Cette fonction (voir Fig. 1.8) vérifie les conditions d'application du théorème de la dichotomie.

Calculons

$$\begin{cases} f(1) = 1 - 6 + 8 = 3, \\ f(3) = 9 - 18 + 8 = -1. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f(1)f(3) < 0$$

On en déduit qu'il existe au moins une valeur $x_0 \in]1, 3[$ telle que $f(x_0) = 0$. En cherchant alors la valeur de $f(\frac{1+3}{2}) = f(2)$, il est alors facile de vérifier que $f(2) = 0$ et donc que la valeur de la solution recherchée est $x_0 = 2$. Calculons maintenant :

$$\begin{cases} f(3) = 9 - 18 + 8 = -1, \\ f(5) = 25 - 30 + 8 = 3. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f(3)f(5) < 0$$

On en déduit qu'il existe au moins une valeur $x_0 \in]3, 5[$ telle que $f(x_0) = 0$. En cherchant alors la valeur de $f(\frac{3+5}{2}) = f(4)$, il est alors facile de vérifier que $f(4) = 0$ et donc que la valeur de la solution recherchée est $x_0 = 4$. On retrouve ainsi les deux racines du trinôme du second degré sans faire appel au calcul du discriminant (voir Fig. 1.8).

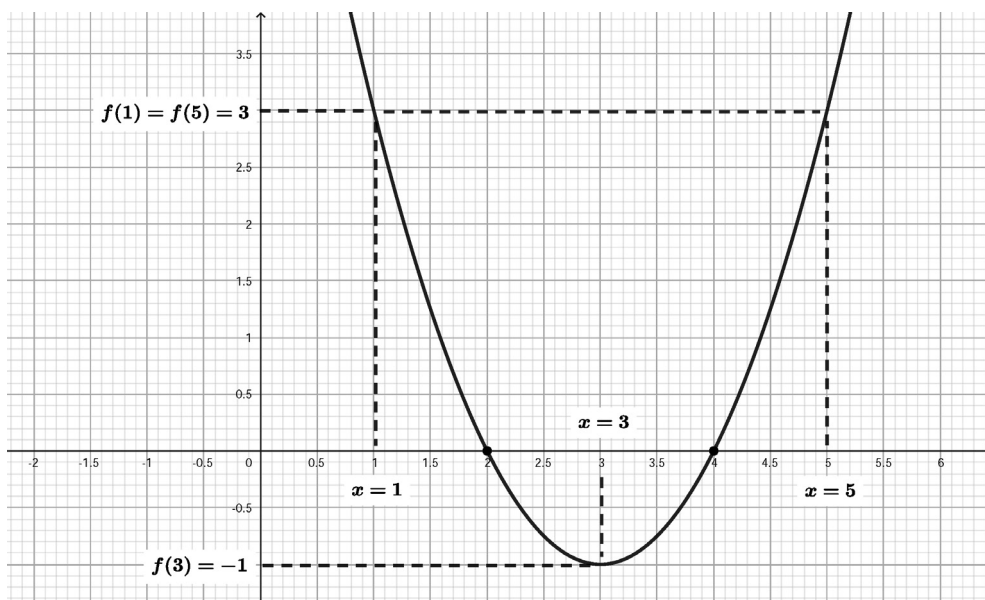


FIGURE 1.8 – Exemple d’application du Théorème de la dichotomie.

1.5 Exercices

n° 1.1 Ensembles et intervalles de définition des fonctions suivantes

1. $f(x) = \frac{2x+3}{x^4-1}$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x^4-1}$
3. $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^4-1}}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x^4-1}}$

n° 1.2 Étudier la continuité des fonctions suivantes en $x = 1$

1. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x-1}$
3. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-1}}$

n° 1.3 Calculer les limites des fonctions suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x + 2}{x+3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}}$
3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+x+1} - ax$
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+1+\sqrt{x^2+x-2}}$

n° 1.4 Calcul de limites

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2\cos(x)}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$

n° 1.5 Règle de dérivation

Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire *et vice versa*

1.6 Correction des exercices

n° 1.1

1. La fonction $f(x) = \frac{2x+3}{x^4-1}$ est définie si et seulement si $x^4 - 1 \neq 0$. Or,

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - (1^2)^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1^2) = (x+1)(x-1)(x^2 + 1)$$

Ainsi, $x^4 - 1$ ne peut s'annuler que pour $x = -1$ ou $x = 1$.

Le domaine de définition de $f(x)$ s'écrit donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
L'intervalle de définition de $f(x)$ s'écrit :

$$]-\infty, -1[\cup]-1, +1[\cup]+1, +\infty[$$

2. La fonction $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x^4-1}$ est définie si et seulement si $2x+3 \geq 0$ et si $x^4 - 1 \neq 0$. La première condition implique $x \geq -\frac{3}{2}$. La seconde condition vient d'être calculée. La fonction $f(x)$ est définie si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2}, \\]-\infty, -1[\cup]-1, +1[\cup]+1, +\infty[. \end{cases}$$

L'intervalle de définition de $f(x)$ s'écrit :

$$[-\frac{3}{2}, -1[\cup]-1, +1[\cup]+1, +\infty[$$

3. La fonction $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^4-1}}$ est définie si et seulement si $x^4 - 1 > 0$. Or, $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$. Il faut donc étudier le signe de $x^2 - 1$ (car $x^2 + 1 > 0$). Or, le signe du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ lorsque $\Delta > 0$ est donné par le signe de a en dehors des racines et de $-a$ entre les racines. Il en résulte que $x^2 - 1 \geq 0$ pour $]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$. Mais, ce polynôme étant au dénominateur de la fonction, il ne peut prendre aucune valeur égale à 0. L'intervalle de définition de $f(x)$ s'écrit donc : $]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$.

4. La fonction $f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x^4-1}}$ est définie si et seulement si son *radicande*, i.e. l'expression se trouvant sous la racine carrée, est positive ou nulle. Mais, puisque cette expression est une fraction rationnelle, il faut également que son dénominateur soit non nul. On a donc les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2}, \\]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$$

L'intervalle de définition de $f(x)$ s'écrit : $]1, +\infty[$

n° 1.2

1. La fonction $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ n'est pas définie en $x = 1$. Elle n'est donc pas continue en $x = 1$.

2. La fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ est définie en $x = 1$.
En effet, $f(1) = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$. Elle est donc continue en $x = 1$.

3. La fonction $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$ n'est pas définie en $x = 1$. Elle n'est donc pas continue en $x = 1$.

4. La fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ n'est pas définie en $x = 1$. Elle n'est donc pas continue en $x = 1$.

n° 1.3

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x + 2}{x+3}$. Tout d'abord, il est important de rappeler que :

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ +x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On a donc : $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x + 2}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x(1 + \frac{2}{x})}{x(1 + \frac{3}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - (1 + \frac{2}{x})}{(1 + \frac{3}{x})} = \frac{1-1}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x + 2}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x(1+\frac{2}{x})}{x(1+\frac{3}{x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - (1+\frac{2}{x})}{(1+\frac{3}{x})} = \frac{-1-1}{1} = -2
\end{aligned}$$

On peut vérifier facilement ces deux limites en traçant la représentation graphique de la la fonction.

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}
\end{aligned}$$

Pour calculer la seconde limite, on va utiliser la *forme conjuguée* qui consiste à multiplier $\sqrt{x}-1$ par $\sqrt{x}+1$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} &= \sqrt{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}(\sqrt{x}+1) \\
&= \sqrt{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{2} + \frac{1-1}{\sqrt{1}+1} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+x+1} - ax$$

Remarquons tout d'abord que : $\sqrt{x^2+x+1} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - ax &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - ax \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - a \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-a)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-a) \begin{cases} +\infty & \text{si } 1-a > 0 \text{ soit } a < 1, \\ 0 \times \infty & \text{si } 1-a = 0 \text{ soit } a = 1, \\ -\infty & \text{si } 1-a < 0 \text{ soit } a > 1, \end{cases}$$

Lorsque $a = 1$, on est en présence d'une *forme indéterminée*. On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

Pour lever cette indétermination, utilisons la *forme conjuguée*. On obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - ax &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - ax \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + a \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x(1+a) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x(1+a) \begin{cases} +\infty & \text{si } 1+a > 0 \text{ soit } a > -1, \\ 0 \times \infty & \text{si } 1+a = 0 \text{ soit } a = -1, \\ -\infty & \text{si } 1+a < 0 \text{ soit } a < -1, \end{cases}$$

Lorsque $a = -1$, on est en présence d'une *forme indéterminée*. On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x$$

Pour lever cette indétermination, utilisons la *forme conjuguée*. On obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \left(\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En $-\infty$, on obtient une *forme indéterminée*. Pour lever l'indétermination, on utilise de nouveau la *forme conjuguée*.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}} \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2} \right)}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}} \left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}} \right)}{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x}} \right)}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = +\infty \end{aligned}$$

n° 1.4

On est confronté ici à une *forme indéterminée* de type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. On applique donc la règle de l'Hospital .

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1/\cos^2(x)}{-2\sin(2x)} = \frac{(2/\sqrt{2})^2}{2} = 1.$
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3\cos(3x)}{2\sin(x)} = \frac{3\cos(\pi)}{2\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3}{2} \frac{-1}{\sqrt{3}/2} = -\sqrt{3}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a/\cos^2(ax)}{1} = a.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\cos(ax)}{1} = a.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1} = 0.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}.$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \text{ si } \alpha > 0.$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$

n° 1.5

Si $f(x)$ est paire : $f(-x) = f(x)$. Utilisons la dérivée de fonctions composées.

$$[f(-x)]' = -f'(-x) = [f(x)]' = f'(x) \text{ puisque } f(x) \text{ est paire.}$$

On en déduit que $-f'(-x) = f'(x)$ soit $f'(-x) = -f'(x)$. Ce qui traduit le fait que $f'(x)$ est impaire.

Si $f(x)$ est impaire : $f(-x) = -f(x)$, la dérivée de fonctions composées donne :

$$[f(-x)]' = -f'(-x) = [-f(x)]' = -f'(x) \text{ puisque } f(x) \text{ est impaire.}$$

On en déduit que $-f'(-x) = -f'(x)$ soit $f'(-x) = f'(x)$. Ce qui traduit le fait que $f'(x)$ est paire.

Chapitre 2

Étude de fonctions

2.1 Domaine et / ou intervalle de définition

- Détermination et réduction du domaine (intervalle) d'étude.
- Continuité

2.2 Limites

- Calcul des limites aux bornes du domaine (intervalle) d'étude.
- Détermination des asymptotes
 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors $x = a$ est asymptote verticale (Fig. 2.1).

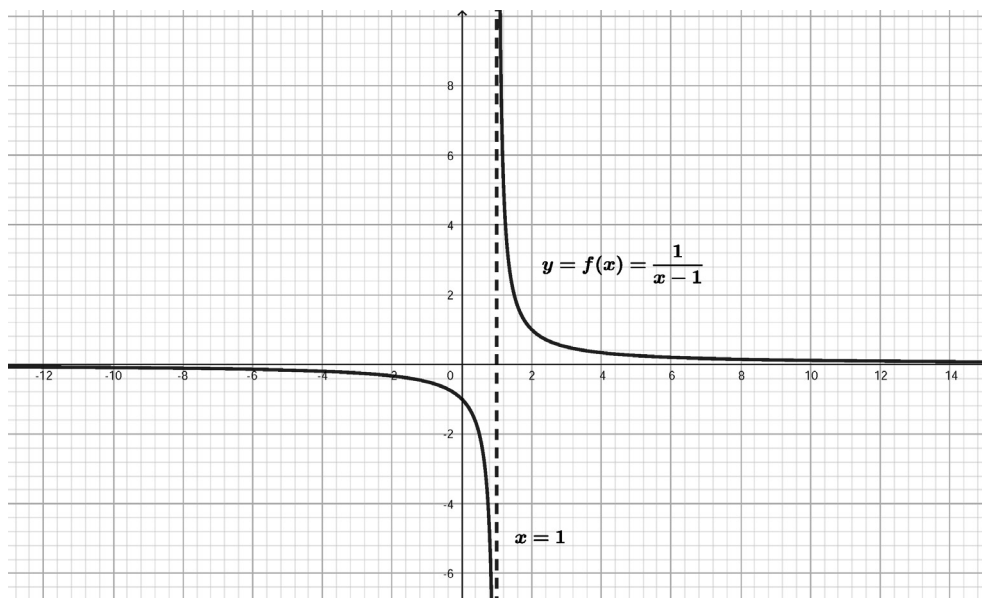


FIGURE 2.1 – Exemple d'asymptote verticale.

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ alors $y = b$ est asymptote horizontale (Fig. 2.2).

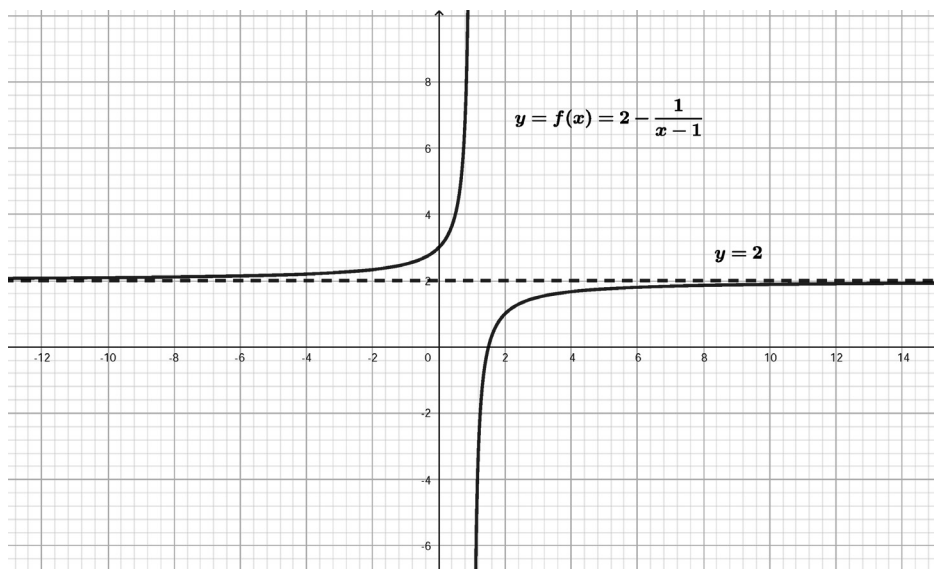


FIGURE 2.2 – Exemple d'asymptote horizontale.

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, $y = ax + b$ est asymptote oblique (Fig. 2.3).

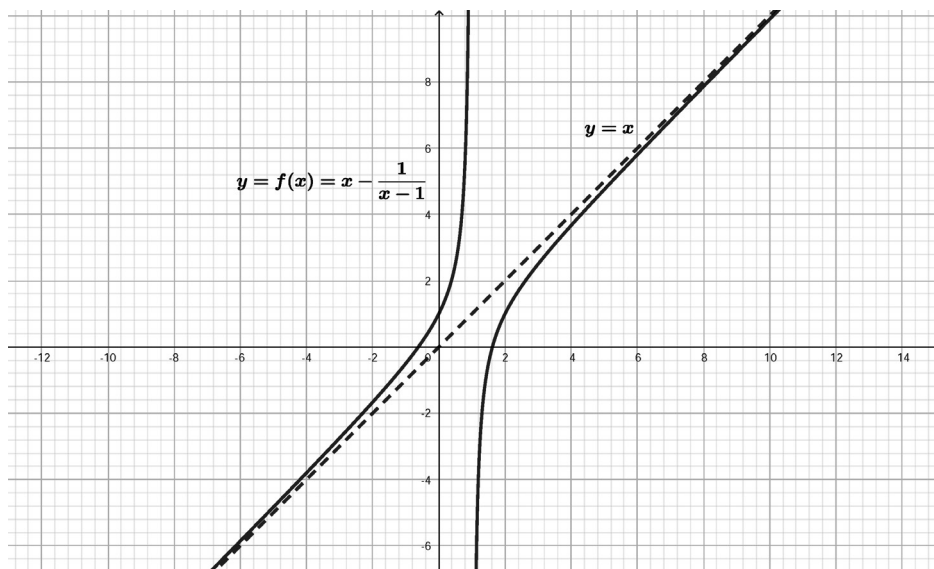


FIGURE 2.3 – Exemple d'asymptote oblique.

Remarque :

- L'axe $(x'Ox)$ est la droite d'équation $y = 0$.
- L'axe $(y'Oy)$ est la droite d'équation $x = 0$.

2.3 Dérivée – Dérivabilité

- Si $f'(x) > 0$ alors la fonction f est croissante.
- Si $f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante.
- Si $f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante.

2.4 Tableau de variations

Tableau synoptique représentant l'évolution de la fonction f restreinte à l'intervalle d'étude.

2.5 Représentation graphique

Utilisation des résultats précédents pour établir une représentation graphique de la fonction f sur tout son domaine (intervalle) de définition. (Vérification à l'aide d'un calculateur scientifique).

2.6 Exemple

Soit la fonction : $y = f(x) = \frac{1}{x-1}$.

2.6.1 Domaine et intervalle de définition

Cette fonction est une fraction rationnelle qui correspond au 1^{er} cas du Chapitre 1. Elle est donc définie pour toute valeur de $x - 1 \neq 0$, i.e. $x \neq 1$.

Son domaine de définition s'écrit $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Son intervalle de définition s'écrit $] -\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Cette fonction n'est ni paire, ni impaire. Donc, on ne peut réduire son intervalle de définition.

2.6.2 Limites

Calcul des limites en $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

D'où, $y = 0$, i.e., l'axe $x'Ox$ est asymptote horizontale (voir Fig. 2.4).

Limite à gauche / à droite de $x_0 = 1$.

- Limite à gauche :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(1-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\varepsilon-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\varepsilon} = -\infty$$

- Limite à droite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(1+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\varepsilon-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{+\varepsilon} = +\infty$$

On en déduit que $x = 1$ est asymptote verticale (voir Fig. 2.4).

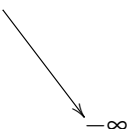
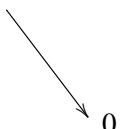
2.6.3 Dérivée – Dérivabilité

La dérivée de la fonction $f(x)$ est :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Puisqu'un carré est toujours positif ou nul et que cette dérivée est précédée d'un signe $-$, elle est par conséquent négative sur tout le domaine / intervalle de définition de $f(x)$. Il en résulte que $f(x)$ est décroissante sur son domaine ou intervalle de définition.

2.6.4 Tableau de variations

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	0  $-\infty$		$+\infty$  0

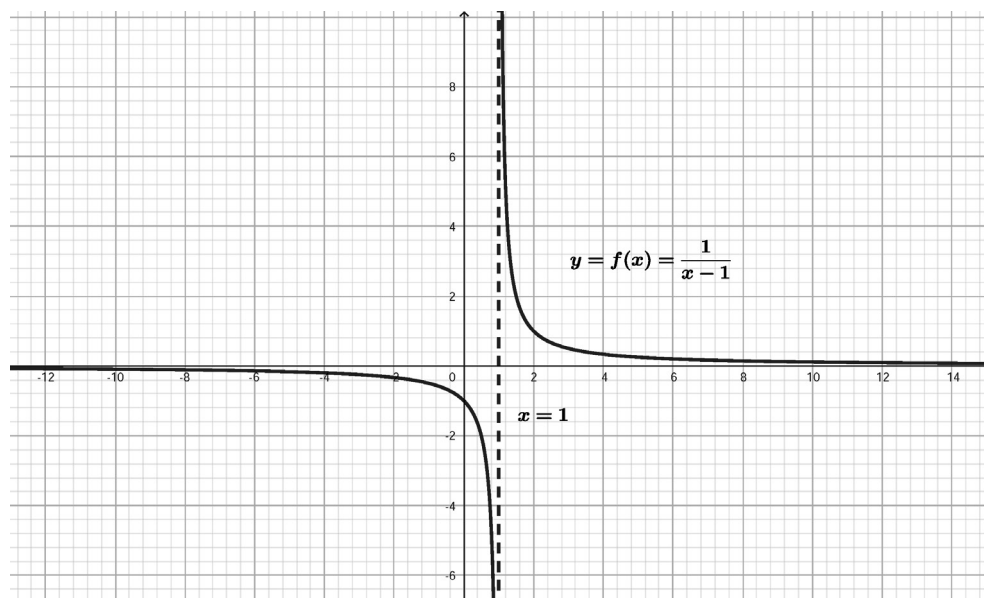
2.6.5 Représentation graphique

FIGURE 2.4 – Représentation graphique de $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

2.7 Exercices

n° 2.1 Étudier la fonction suivante

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Déterminer les coordonnées de l'extremum de $f(x)$.
3. Étudier le signe de $f(x)$ en fonction du signe de a
4. Application : $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$.

n° 2.2 Étudier la fonction suivante

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

n° 2.3 Étudier la fonction suivante

$$y = f(x) = x - \frac{1}{x-1}$$

Résoudre $f(x) = 0$. Que représente l'une des deux solutions ?